数理解析研究所講究録
377巻 1980年 134-140

Doubly stochastic matrices と Farkas の lemma について

東大 教養 新納文雄

$E=\mathbb{R}^n$ としEのベクトル $\mathbf{a}=(a_i)$, $\mathbf{b}=(b_i)$ の間に Hardy-Littlewood-Polya の順序 $\mathbf{a}\succ\mathbf{b}$ を

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^* \geqq \sum_{i=1}^{k} b_i^* \quad (k=1,\cdots,n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_i^*$$

により定義する。ここに a_i^*, b_i^* は a_i, b_i を夫々大きいものから順次ならびかえたものである。またn次正方行列 $T=(t_{ik})$ が doubly stochastic とは

$$t_{i,k} \geqq 0 \quad (1 \leqq i,k \leqq n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik} = 1 \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_{ik} = 1 \quad (1 \leqq k \leqq n)$$

とする。以下 doubly stochastic な行列の全体の集合を $\mathfrak{D}$ とする。このとき次の結果はよく知られている。

I $\quad {}^{\exists}T \in \mathfrak{D},\ T\mathbf{a}=\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a}\succ\mathbf{b}$

Ⅱ $T \in \mathfrak{D} \Longleftrightarrow {}^\forall \mathbf{a} \in E$, $T\mathbf{a} \prec \mathbf{a}$

Ⅰ, Ⅱの中間階階として次の問題がある。

<u>問題1</u> $\mathbf{a}_i \succ \mathbf{b}_i$ $(i=1,\cdots,k)$ がなりたつとき
$T\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ $(i=1,\cdots,k)$ となる $T \in \mathfrak{D}$ が存在
するか？

<u>問題2</u> Eの部分空間Fで定義されたEの中への線型写像Tで $T\mathbf{a} \prec \mathbf{a}$ $(\mathbf{a} \in F)$ を満足するものをE全体に doubly stochastic に extend 出来るか？

上の問題に対しそれぞれの反例は下に示すものである。

<u>反例1.</u> $E = \mathbb{R}^3$ とし

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>反例2</u> $E = \mathbb{R}^4$ $F = \left\{ (x_i) ; x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{6} \right\}$ とし

TはFの基底 $\mathbf{a}_i$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ により次の様に決められた線型写像とする。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\6\end{pmatrix}, \quad Ta_3 = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\3\\10/3\end{pmatrix}$$

反例2が問題2の反例になることは下の定理1より直ちにわかる。よって問題2のかわりに次の問題を考える。

<u>問題3</u>　Eの部分空間Fで定義されたEの中への線型写像Tで $Ta \prec a$ $(a \in F)$ となるものが $\mathfrak{D}$ の元にextend出来る必要十分な条件はなにか?

この解答は次の定理1により与えられる。

<u>定理1</u>　$E = \mathbb{R}^n$ としFをEの部分空間で $F \ni \mathbb{1}$ (constant 1のベクトル)とする。更に $Tx \prec x$ $(x \in F)$ がなりたつときTを $\mathfrak{D}$ の元にextend出来る条件はFに属する任意のn個のベクトル $c_1, \cdots, c_n$ に対して

$$\tau(c_1 \wedge \cdots \wedge c_n) \leq \tau(Tc_1 \wedge \cdots \wedge Tc_n) \cdots (*)$$

がなりたつことである。

ここに $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ に対して

$\tau(a) = a_1 + \cdots + a_n$

$a \wedge b = (\mathrm{Min}(a_i, b_i))$ とする。

一般に順序 $\succ$ に対して次の性質がなりたつことは容易に証明出来る。

[A] $\mathbf{a} > \mathbf{b} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の実数}\alpha\text{に対し} \\ \|\alpha \mathbb{1} + \mathbf{a}\|_1 \geq \|\alpha \mathbb{1} + \mathbf{b}\|_1, \\ \|\alpha \mathbb{1} + \mathbf{a}\|_\infty \geq \|\alpha \mathbb{1} + \mathbf{b}\|_\infty \end{array} \right.$

[B] $T \in \mathfrak{D} \iff T\mathbb{1} = \mathbb{1},\ \|T\|_\infty = \|T\|_1 = 1$

ここに $\|\mathbf{a}\|_1$, $\|\mathbf{a}\|_\infty$ はそれぞれベクトル $\mathbf{a}$ の l_1 ノルム及び l_∞ ノルムとし, $\|T\|_1$, $\|T\|_\infty$ はそれぞれ T の l_1 ノルム及び l_∞ ノルムとする。これを考えると上の定理1は E の部分空間 $F(\ni \mathbb{1})$ で定義された線型写像 T で $T\mathbb{1} = \mathbb{1}$ であり且 $\|\ \|_1$, $\|\ \|_\infty$ で contraction のものを全体まで同じ性質を保存して extend 出来る条件をあたえることになる。

北大の安藤氏のシテキにより上の定理は次の定理の系になることがわかった。(証明は容易である。)

定理2. $E = R^n$ とし E の部分空間 F で定義された E の中への線型写像 T が positive 且 $\tau(Tx) = \tau(x)$ $(x \in E)$ の性質を満足する様に extend 出来る条件は上の A である。

Remark. 上の定理の系として F が E の sublattice のときは上の extension がつねに可能なことがわかる。

定理の証明には次の Minkowsky-Farkas の lemma をつかう。

Lemma (Minkowsky-Farkas)

A を (m, n) 行列 x を n 次列ベクトル, $\mathbf{b}$ を m 次列ベクトル $\mathbf{p}'$ を m 次行ベクトルとするとき

$A x = b$ が $x \geqq 0$ となる解をもつ条件は

$p'A \geqq 0' \Longrightarrow p'b \geqq 0$ である。

定理2の証明

F の基底として $a_1, \dots, a_s$ をとる。T を doubly stochastic 行列 $\tilde{T} = (t_1, \dots, t_n)$ に extend 出来るとし、$T a_j = b_j$ $(1 \leqq j \leqq s)$ とする。$\tilde{T}$ の満たすべき条件は次の形にかける

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} I & a_{21} I & \cdots & a_{n1} I \\
a_{12} I & a_{22} I & \cdots & a_{n2} I \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1s} I & a_{2s} I & \cdots & a_{ns} I \\
1' & 0' & \cdots & 0' \\
0' & 1' & \cdots & 0' \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0' & 0' & \cdots & 1'
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_s \\ 1
\end{pmatrix}
$$

上の方程式が $t_1, \dots, t_n \geqq 0$ なる解をもつ条件を求めればよいことになる。

ここに I は n 次単位行列とし

$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

Farkas の lemma により 上の条件は

$$(\mathbb{P}_1', \cdots, \mathbb{P}_s', \mathbb{P}')\, A \geqq 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\Longrightarrow (\mathbb{P}_1', \cdots, \mathbb{P}_s', \mathbb{P}') \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{b}_s \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \geqq 0 \quad \cdots (2)$$

ここに $\mathbb{P}_j' = (p_{j1}, \cdots, p_{jn}) \quad (1 \leqq j \leqq s)$

$\mathbb{P}' = (p_1, \cdots, p_n)$ とする

(1)の左辺の $(i-1)n+j$ 列目の要素から

$$p_{1j}a_{i1} + p_{2j}a_{i2} + \cdots\cdots + p_{sj}a_{is} + p_i \geqq 0$$

$$p_{1j}a_{i1} + p_{2j}a_{i2} + \cdots\cdots + p_{sj}a_{is} \geqq -p_i \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n \end{pmatrix}$$

$p_{1j}\mathbb{a}_1 + p_{2j}\mathbb{a}_2 + \cdots\cdots + p_{sj}\mathbb{a}_s = \mathbb{c}_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$ とおくと

$$\mathbb{c}_j \geqq -\mathbb{P} \quad (1 \leqq j \leqq n) \quad \cdots\cdots (3)$$

(2)は $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqq i \leqq s \\ 1 \leqq j \leqq n}} p_{ij} b_{ji} \geqq -(p_1 + \cdots + p_n)$ となり

次の形になる

$$\sum_{j=1}^{n} (T\mathbb{c}_j)^{(j)} \geqq \tau(-\mathbb{P}) \quad \cdots\cdots (4)$$

ここにベクトル $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対し $\mathbb{a}^{(j)} = a_j$ とする。

$(T\mathbb{c}_j)^{(j)} \geqq (T\mathbb{c}_1 \wedge \cdots \wedge T\mathbb{c}_n)^{(j)}$ から ☆ が十分条件であることはすぐにわかる。 必要条件になることは

$\mathbb{b} = -(\mathbb{a}_1 \wedge \cdots\cdots \wedge \mathbb{a}_n)$ とし

$(T\mathbb{a}_1 \wedge \cdots\cdots \wedge T\mathbb{a}_n)^{(j)} = T\mathbb{a}_{k(j)}$ となる $k(j)$ をえらび

$\mathbb{a}_{k(1)}, \cdots\cdots, \mathbb{a}_{k(n)}$ に対し (4) を考えれば Φ がえられる。

尚上の定理の系として $\mathbb{a} \succ \mathbb{b} \Longrightarrow {}^{\exists}T \in \mathfrak{D}\ \ T\mathbb{a} = \mathbb{b}$ の別証が導かれる。

北大の安藤氏は上の結果を無限次空間の L_1, L_∞ 等における operator に拡張された。

参考文献

[1] Mirsky, L., Results and problems in the theory of doubly stochastic matrices. Z. Wahr. 1 (1963), 319-334.

[2] 二階堂副包, 経済のための線型数学. 培風館 新数学シリーズ 22 (1961)